Jump-Diffusion LIBOR Rate Model with Stochastic Volatility, and Equilibrium Pricing of Interest Rate Derivatives

滋賀大学　楠田　浩二

＜報告要旨＞

先渡し LIBOR(London InterBank Offered Rate)金利と先渡しスワップ金利のヨーロピアンオプションであるキャップとスワップションは最も取引量の多い金利派生商品である。1997円に発表されたLIBOR Market(LM)モデルは先渡しLIBOR金利版のBlack-Scholesモデルと解釈し得る。LM モデルでは、キャップの無裁定価格が先渡し LIBOR 金利版のBlack-Scholes 公式として得られるほか、スワップションの無裁定価格も近似的に先渡しスワップ金利版の Black-Scholes 公式として得られることから、実務家の間で最も広範に利用されている。しかし、著者による実証分析の結果、LM モデルは棄却され、同モデルにおける非確率的ボラティリティ項を確率的ボラティリティ項に置き換える、或いは同モデルにジャンプ項を導入する、という二つの改善が示唆された。前者の改善を施したモデルは Andersen and Ratcliffe [2001]により、後者の改善を施したモデルは Glasserman and Kou [2001]により、それぞれ提案されている。しかし、確率的ボラティリティ項への置き換えは長い満期を持つオプションの価格に影響を与え、ジャンプ項の導入は短い満期を持つオプションの価格に影響を与えるという意味で、これらの改善は代替的な関係にはない。また、多くの実証分析の結果が両改善を支持している。こうした点を考慮すると、これら両方の改善を施した Stochastic Volatility Jump-Diffusion(SVJD)モデルを構築し、各改善を施したモデルは構築されたSVJDモデルの入れ子モデルとして検定を行うのが筋であろう。

本稿では、LM モデルに上記両改善を施した SVJD LIBOR 金利モデルを構築する。この際、とりわけジャンプ項を導入する際に留意すべきは、リスク、とりわけジャンプ・リスクの市場価格が解析的に取扱い易いかたちをしていなければオプション評価モデルも解析的に取扱い易いかたちにはならない、という点である。例えば、Glasserman and Kou [2001]は、彼らのオプション評価モデルが解析的に取扱い易いかたちになるようにリスクの市場価格を恣意的に設定している。しかし、そもそもリスクの市場価格は一般均衡解として決定されるべきものである。従って、こうした設定を正当化するためには同設定を支持する合理的な一般均衡モデルの存在を示す必要がある。最近著者はジャンプ拡散オプション評価モデルの一般的な枠組みを提供する一般均衡モデルを示した。本稿では、この一般均衡枠組みを用いて、SVJD LIBOR 金利モデルを構築した。

次に問題となるのは、キャップ及びスワップションの均衡価格公式の導出法である。す

なわち、ジャンプ拡散モデルの場合はマルチンゲールアプローチが、確率的ボラティリティモデルの場合は漸近展開アプローチが適用できるが、確率的ボラティリティジャンプ拡散モデルの場合は何れのアプローチも適用困難である。そこで我々は Duffie *et al.* [2000]が提案した Affine Jump-Diffusion(AJD)モデルに着目した。AJD モデルは対象とする原証券に関する状態変数がリスク中立測度の下で AJD 構造を有するモデルであり、これまで提案された多くの確率的ボラティリティジャンプ拡散モデルを含んでいる。AJD モデルではフーリエ変換法によりヨーロピアンオプションの無裁定価格公式が準解析的解として導出される。我々は、SVJD LIBOR 金利モデルにおいてある先渡し LIBOR 金利（先渡しスワップ金利）に関するあるキャプレット（スワップション）の均衡価格を考察するに際し、当該オプションの満期までの時間を分割し、当該金利に関する状態変数が各々に対応する先渡し測度の下で分割された区分毎に近似的な AJD 構造を有することを示した。そして、フーリエ変換法によりキャップとスワップションの均衡価格公式を近似準解析解として導出した。

最後に、SVJD LIBOR 金利モデルを推定するために連続無限個のモーメント条件を持つ GMM (C-GMM)として Carrasco *et al.* [2003]により提案されている推定法に着目した。C-GMM は特性関数から構成される連続無限個のモーメント条件を利用した推定法であり、データがマルコフ性を有する場合は、有限個のモーメント条件しか利用しない GMM とは異なり効率的な推定量を実現できる。また、我々のモデルのように確率項であるボラティティリティ項が観察できず、従ってデータがマルコフ性を有しない場合も効率性の高い推定量を構成できる。我々は、SVJD LIBOR 金利モデルに対し C-GMM を利用した効率性の高い推定量を構成できることを示す。

＜討論者からのコメント＞

一橋大学　高見澤秀幸

楠田論文の主要な貢献は、LIBOR Market モデルにジャンプや確率的ボラティリティを導入してその統計的記述力を高めた上で、そのモデルが解析的に取り扱い易い形で得られることを示した点にあります。以下に具体的に貢献を挙げ、さらに今後の展望について述べていきます。

レビュー：

１．楠田氏がモデル化の対象としているキャップやスワップションは、非常に取引が活発であり、これらの市場価格をモデル化しようとする研究は大変有意義である。

２．現在標準的に用いられているモデルの１つに LIBOR Market モデルがある。このモデルでは、原資産（LIBOR）が対数正規分布に従うと仮定されている。しかし、自身の先行研究により、LIBOR はより裾の厚い分布をもつことが確かめられている。従って、今回の研究ではこの統計的性質を取り込むため、原資産の変動過程にジャンプと確率的ボラティリティを導入した。この具体的効果としては、前者は短い期間の条件付き分布の裾を厚くし、後者は長い期間の条件付き分布を厚くすることが知られている。これにより、観測されるデータとより整合的なモデル化を行い、派生証券（キャップやスワップション）のプライシング精度の向上を図った。

３．さらに、Market Price of Risk の定式化にあたり、一般均衡の枠組みを用いた。これは、資産価格を既に与えた上で裁定がおこらないように定式化するいわゆる無裁定の枠組みよりも、モデルとしての整合性がはるかに高い。

４．ジャンプと確率的ボラティリティを導入したため、キャップやスワップションの価格式を解析的に得ることが困難になる。効率的な計算が求められる実務的な観点からは、これは致命的な弱点になりうる。しかし、楠田氏はこの弱点を克服する方法を見出した。即ち、ジャンプや確率的ボラティリティをもつ LIBOR Market モデルを近似すると、Affine Jump Diffusion（AJD）モデルとして実現可能であることを示したのである。よく知られている通り、AJD モデルはほぼ解析的に派生商品価格を得るため、計算時間を大幅に節約できる。これを可能ならしめる近似の提案は、当研究で最も興味深い成果と言える。

５．さらにモデルの推定において、最近提案された効率的な推定方法（連続無限個のモーメント条件を持つ GMM と解釈しうる同時特性関数を利用した推定方法）をこの一般性の高いモデルに適用可能であることも示した。

今後の展望：

① 近似精度はどの程度か？　AJD の枠組みにもっていく際に近似を用いたので、その近似誤差の程度を調べる必要がある。具体的には、モンテカルロ法などで数値的に計算したキャップやスワップション価格と比較することでそれは可能である。近似精度の高さが保証されれば、研究面だけでなく実務面においても今回提案されたモデルの価値は極めて高いものとなるはずである。

② ジャンプや確率的ボラティリティを導入すれば、本当に市場データと整合的か？株式や為替に関するオプションについては、ジャンプや確率的ボラティリティを付加することで、市場で観測されるインプライド・ボラティリティをより良く説明できることが知られている。しかし、この事実が研究対象とするキャップやスワップション

市場にも直接的に当てはまるかは、一概に判断するのが難しい。これらの市場におけるインプライド・ボラティリティと原資産の振舞いとの関係を調べた実証研究が相対的に少ないからである。当研究で提案されたモデルはこのような実証研究の土台となり、研究成果を飛躍的に高める可能性を秘めている。今後の課題として期待したい。

＜討論者からのコメントに対するリプライ＞

高見澤氏がご指摘下さった二つの点は何れも重要な点なので、今後の課題として取り組んでいきたい。