

# Real Options in a Duopoly Market with General Volatility Structure

京都大学 木島正明・芝田隆志

## < 報告要旨 >

This paper considers strategic entry decisions in a duopoly market when the underlying state variable follows a diffusion with volatility that depends on the current state variable. The extension to this case is more than marginal, since empirical studies have suggested that the volatility is indeed non-constant in real options practices. It is shown that, even in the extended model, three types of equilibria exist in the case of strategic substitution, as for the geometric Brownian case, when the revenue functions are linear. Also, the presence of strategic interactions may push a firm with cost advantage to invest earlier, and the firm value as well as the optimal threshold for the investment decision increases as the market uncertainty increases.

## < 討論者からのコメントとリプライ >

滋賀大学 楠田浩二

木島・芝田両氏による本論文は、Huisman [2001]、Pawlina and Kort [2001]が考察した投資費用の異なる複占企業間の投資競争ゲームで導かれた諸結果が、これら両論文の中で置かれている制約的な仮定をより現実的な仮定に置き換えても成立することを確認したものであり、主要な貢献は次の二点であると思われる。

従来研究で仮定されていた状態変数の確率過程をより現実的な確率過程に置き換えたこと。従来研究では、状態変数（企業収益フロー）は幾何ブラウン運動に従うと仮定されており、従って状態変数のボラティリティは定数であるとされていた。しかし、多くの実証分析の結果、状態変数のボラティリティは変動することが示されている。こうした実証分析の結果を踏まえて、本論文では、状態変数のボラティリティが状態変数に依存するというより現実的な確率過程を仮定した。

従来研究におけるやや煩雑な証明の単純化を図ったこと。状態変数のボラティリティが状態変数に依存する形では、各企業の最適化問題において解析解を得ることができないため、Alvarez and Stenbacka [2001]は、レゾルベント・オペレーターを利用し

て同問題の解に関する定性的な結果を幾つかの定理として導いている。しかし、彼らが導出した定理における証明では、グリーン関数が用いられており証明がやや煩雑という難点があった。本論文では、Alvarez and Stenbacka [2001]と同様にレゾルベント・オペレーターを利用しながらも、証明においてはグリーン関数の代わりにカップリングと呼ばれる最近の手法を適用することによって彼らの証明の単純化を図ることに成功した。

次に、本論文に関する指摘及び疑問点は以下の通り。

1. 本論文では状態変数のボラティリティが状態変数(企業収益フロー)に依存する形に拡張された。しかし、状態変数の代理変数とみなされる株価の確率過程は、多くの実証分析により、そのボラティリティが株価ではなく別の状態変数に依存するような確率過程であり、しかも株価は本論文で仮定されているような連続的に変動する確率過程ではなく非連続的な変動を含む確率過程であるとの結果が示されている。従って、「状態変数の確率過程をより現実的な確率過程に置き換えること」を論文の主たる貢献とするのであれば、本論文の拡張では未だ不十分であり、さらなる拡張が必要と思われる。

(回答) 指摘された上記の拡張モデルは、今後考察されるべきである。しかしながら、本論文で用いた手法ではサンプル・パスが連続であるという仮定に依存しており、指摘された拡張モデルでは、別の革新的な手法を開発する必要がある。

2. 木島・芝田論文では、論文中の(1)式が企業  $i$  の最適化問題であり、最適化された  $V_i$  が企業  $i$  の価値であるとしている。しかし、同問題を企業  $i$  の最適化問題と解釈するのであれば、割引因子はリスクフリーレートではなく企業  $i$  の主観的割引率であるべきであり、最適化された  $V_i$  を企業価値と解釈するのであれば、期待作用素は両企業共通の主観確率の下でのものではなくリスク中立確率の下での期待作用素であるべきと考えるが如何？

(回答) 本論文では、複占市場における企業はリスク中立的であると仮定しており、割引率をリスク・フリー・レートとして扱っている。すなわち本論文では、リスク・フリー・レートを両企業共通の割引率と仮定している。本来、各企業の割引率は、企業固有の割引率をもつと考えられるが、企業間の非対称性は費用構造に組み込んだため、簡略化のため、両企業は共通割引率をもつと仮定した。

3. 本論文における「不確実性が増大するほど企業価値は増大する」という結果は企業が

リスク中立的であるという仮定に強く依存しているように思われるが如何？すなわち、この結果は不確実性の増大は投資オプションを実行しないリスク中立な企業の効用に影響を及ぼさない一方、企業の投資オプションの価値に正の影響を及ぼすことから導かれていると思われる。企業がリスク回避的な場合、不確実性の増大は投資オプションを持たない企業の効用に負の影響を及ぼすため、不確実性の増大が企業価値を増大させるかどうかは、この負の効果と投資オプション価値増大の正の効果の綱引きの結果に依存し、従って必ずしも企業価値は増大させることにならないと思われるが如何？

(回答) 「不確実性が増大すると企業価値も増大する」という命題は、リスク中立という仮定には依存していない。不確実性が増大すると企業価値も増大するのは、リアル・オプション法では企業価値をオプションとして評価するからである。

4. 「企業がリスク中立的である」という仮定は解析的な取り扱い易さから便法として置かれてきたものと思われる。しかし、便法が有効足り得るのは、それが重要な定性的結果を左右しない場合にとどまる。もし疑問点3における当方の推論が正しいのであれば、これは正しく便法として置かれている企業のリスク中立性の仮定が重要な定性的結果を左右していることを示しており、従って、同仮定を今一度再検討することを示唆しているように思われるが如何？

(回答) 疑問点3の議論においては、企業がリスク中立的であるという仮定に依存していない。もし企業がリスク中立的であると仮定しないならば、企業の効用関数を推定し、その期待効用最大化問題を考慮しなければならない。このような効用関数の推定は、本来考慮すべき点ではあるが、非常に困難な作業である。それゆえ、リアル・オプション分析では、企業はリスク中立であるという仮定の下で議論を出発させており、本論文でも同様の仮定をおいている。

#### <フロアからの質問とそれに対する回答>

なし